2.4.2 Prédicats

2.4.2.1 PRINCIPE

Dans la logique des prédicats, nous trouvons dans les prémisses des affirmations faites au sujet d'un, de plusieurs ou de tous les individus. Vérifier la validité signifierait-il donc qu'il faut vérifier ces affirmations pour *tous* les individus par exemple? On voit que ce serait une tâche ardue. Mais en fait, le nombre d'individus concernés par un raisonnement donné est limité par le nombre d'existentielles dans le raisonnement. C'est sur cette considération que s'appuie la méthode des arbres appliquée à la logique des prédicats (PMA).

Considérons le raisonnement suivant (avec une existentielle):

Exemple 1
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Il y a un chien de prison.
|— Donc il y a un chien qui porte malheur.

A y réfléchir on remarque que l'extension inconnue (et peut-être grande) de (1) est réduite immédiatement par (2) qui limite le champ de vérification de la conclusion à **un seul** chien par rapport à (1).

Considérons ce raisonnement (avec 2 existentielles):

Exemple 2
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Il y a un chien de prison.
(3) Il y a un chien qui n'est pas un chien de prison
|— Il y a un chien de prison ou un chien qui n'est pas de prison qui portent malheur.

Ici l'on voit que pour apprécier la validité de la conclusion il faudra la «tester» par rapport aux **deux** affirmations existentielles sur des chiens de prison.

Le nombre d'existentielles dans le raisonnement délimite donc le champ d'application des universelles en le réduisant. Il sera donc essentiel de connaître de manière précise ce nombre d'existentielles, car il nous donnera l'extension du raisonnement à vérifier. Cette procédure s'appelle la **spécialisation**.

Les deux raisonnements sont assez obscurs et difficiles à saisir. C'est surtout l'expression répétée de «il y a un chien…» qui est assez déroutante, car on a l'impression de ne pas très bien saisir de qui on parle précisément.

Puisqu'il en est ainsi, donnons tout simplement un nom à chacun de ces chiens; nous allons **spécifier** de qui il s'agit!

Et comme l'on ne sait pas si dans les existentielles il s'agit toujours du même individu, on admettra par principe que chacune concerne un autre individu[86].

Cette spécification pourrait nous donner:

Exemple 1
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Rantanplan est un chien de prison.
|— Rantanplan porte malheur.

Exemple 2
(1) Tous les chiens de prison portent malheur.
(2) Rantanplan est un chien de prison.
(3) Milou n'est pas un chien de prison.
|— Donc Rantanplan ou Milou portent malheur.

Il est remarquable de constater qu'ainsi les expressions «*il y a …; il existe ….* etc.» ont disparu de notre formulation.

Pour tester la validité d'un raisonnement en logique des prédicats, nous allons en conséquence:

- prendre en considération le nombre d'existentielles dans le raisonnement,
- nous donner un modèle en désignant des individus individuels en remplacement des existentielles (= spécialisation).

2.4.2.2 RÈGLES ET PROCÉDURE

Pour tester la validité d'un raisonnement dans le calcul des prédicats, il faut introduire deux règles nouvelles:

1) spécialisation existentielle:
Si on a $(\exists x)\ Sx$ [s'il y a un individu x ayant la propriété S], alors on peut en déduire qu'il y a au moins une spécialisation possible (a <u>ou</u> b <u>ou</u> c <u>ou</u>...), mais on ne sait pas qui exactement est cet individu. On est donc autorisé a faire une et une seule spécialisation (puisque ce x existe!), mais on la fera par un individu **n'ayant pas encore été utilisé dans le contexte du raisonnement à vérifier**, et nous avons donc:

$(\exists x)\ Sx \quad \Rightarrow \quad Sa$ (a n'ayant pas encore été utilisé)

[86] … quoique dans cet exemple ceci semble assez évident!

Conséquence: Puisqu'au pire des cas il n'y a qu'un seul individu ayant la propriété S, on ne pourra utiliser **qu'une seule fois** la formule initiale.

2) spécialisation universelle:
Si on a $(\forall x)\ Rx$ [si tout individu x a la propriété R], alors on peut en déduire que tout individu quelconque a, b, c etc. a nécessairement la propriété R et nous avons donc:

$(\forall x)\ Rx \quad \Rightarrow \quad Ra$ <u>et</u> Rb <u>et</u> Rc etc.

Conséquence: La formule initiale avec quantificateur peut être réutilisée **autant de fois que nécessaire**.

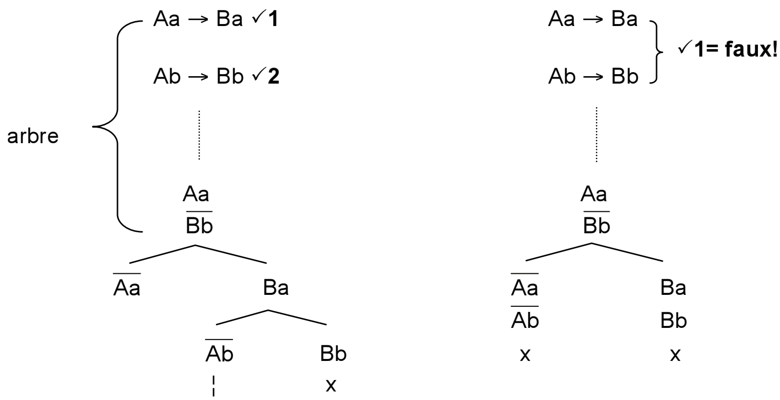
2.4.2.3 CONSEILS

- Puisque les existentielles restreignent le nombre d'individus sur lesquels est vérifié le raisonnement, on procédera d'abord à la spécialisation des existentielles pour fixer un domaine d'interprétation.

  Ensuite seulement on spécialisera les universelles en utilisant les mêmes individus et en tenant compte dans le choix des constantes individuelles du fait qu'il faut aboutir à des contradictions.

- Chaque universelle ainsi spécifiée peut ainsi apparaître 2, 3 ou plus de fois dans un raisonnement. Il faudra les traiter comme autant de vérités différentes (arbre à gauche) et ne pas les ouvrir en une fois (c. arbre à droite)!

  Preuve:



ici: une branche reste ouverte!
CORRECT

ici: les deux branches ferment!
FAUX

- Si dans un raisonnement il n'y a que des universelles, il suffira d'une spécialisation pour vérifier la validité. Les prémisses valant pour tous les individus, un seul contre-exemple (pour l'individu a) invaliderait le raisonnement.

- On remarquera que par la spécialisation les quantificateurs disparaissent. Dans nos exemples, il s'agissait toujours de quantificateurs non niés. Pour les quantificateurs niés on procédera (par les règles des quantificateurs) aux transformations suivantes avant de commencer la construction de l'arbre:

$$\overline{(\forall x)[...]} \quad \Rightarrow \quad (\exists x)\ \overline{[...]} \qquad \text{et} \qquad \overline{(\exists x)[...]} \quad \Rightarrow \quad (\forall x)\ \overline{[...]}$$

  ceci afin de faire disparaître les négations des quantificateurs. Ceci est une étape nécessaire, car des expressions apparemment universelles se réduisent à des existentielles et inversement. Le nombre d'existentielles dans le raisonnement peut changer en conséquence!

- Attention: Aa n'est pas contradictoire avec $\overline{Ab}$. «*Olivier a les yeux bleus*» n'est pas en contradiction avec «*Larissa n'a pas les yeux bleus*».

- On peut aussi, bien entendu, fermer des expressions quantifiées contradictoires. Mais attention:
  - $(\forall x)$ Ax (tous) ferme avec $(\forall x)\ \overline{Ax}$ (aucun) et $\overline{(\forall x)Ax}$ (tous ne sont pas…)
  - $(\exists x)$ Ax (quelque) ferme avec $\overline{(\exists x)Ax}$ (aucun), **mais** n'est pas en contradiction avec $(\exists x)\ \overline{Ax}$ (quelqu'un n'est pas) comme le montre l'exemple ci-dessus!

2.4.2.4 EXERCICES COMMENTÉS

Pour vérifier les raisonnements dans le calcul des prédicats, nous allons mettre en place un «modus operandi» qui pourra paraître un peu lourd et répétitif, mais qui a comme avantage de constituer une démarche fiable.

Cette démarche comporte trois étapes: la *transformation*, la *modélisatio*n et la *vérification*.

La *transformation* consiste à transformer les prémisses jusqu'à pouvoir déterminer avec précision combien il y aura d'existentielles et dans quelle(s) branche(s). Ainsi les quantificateurs niés seront remplacés par d'autres non niés et les expressions à quantification multiple seront ouvertes selon les règles usuelles des arbres pour dégager les quantificateurs niés qui seront à leur tour transformés en quantificateurs non niés. Ensuite nous marquons par * toutes les lignes qui restent pour établir le modèle.

La *modélisation* consiste à remplacer les expressions quantifiées par des expressions contenant des constantes individuelles dont le nombre est donné par le nombre d'existentielles.

La *vérification* se fera par l'application des règles usuelles de vérification pour les arbres.

Exercice 1

Raisonnement

$(\exists x)\ Px;\quad (\forall x)\ [Px \rightarrow Qx] \qquad \vdash \quad (\exists x)\ Qx$

Arbre de vérification

	*	$(\exists x)\ Px$	✓2
	*	$(\forall x)\ [Px \rightarrow Qx]$ ✓4	
		$\overline{(\exists x) Qx}$	✓1
Transformation			
1	*	$(\forall x)\ \overline{Qx}$	✓3
Modélisation			
2		Pa	
3		$\overline{Qa}$	
4		$Pa \rightarrow Qa$	✓5
Vérification			
5		$\overline{Pa}$ Qa	
		x x	

1. Nous introduisons la conclusion sous forme niée.

2. Il n'y a qu'une expression à transformer. Nous remarquons que ce qui était au départ (dans la conclusion) une $(\exists x)$ devient une $(\forall x)$! L'arbre ne contient plus qu'une seule $(\exists x)$.

3. Il suffit de vérifier l'arbre pour un seul individu (1 constante individuelle). Les $(\forall x)$ ne peuvent donc se rapporter qu'à ce seul individu.

4. Nous terminons la vérification par la méthode connue.

Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 2

Raisonnement

$(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx];\ (\forall x)\ [\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}];\ (\exists x)\ [Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\ [\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}];$
$(\exists x)\ [Cx \wedge \overline{Bx}] \quad \vdash \quad (\exists x)\ [Bx \rightarrow Ax]$

Arbre de vérification

	*	$(\forall x)\ [Ax \rightarrow Bx]$	✓5
	*	$(\forall x)\ [\overline{Ax} \rightarrow \overline{Cx}]$	✓6
		$(\exists x)\ [Ax \wedge Ex] \wedge (\forall x)\ [\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$	✓2
	*	$(\exists x)\ [Cx \wedge \overline{Bx}]$	✓3
		$\overline{(\exists x)[Bx \rightarrow Ax]}$	✓1
Transformation			
1	*	$(\forall x)\overline{Bx \rightarrow Ax}$	✓7
2	*	$(\exists x)\ [Ax \wedge Ex]$	✓4
	*	$(\forall x)\ [\overline{Cx} \rightarrow \overline{Ex}]$	✓8
Modélisation			
3		$Ca \wedge \overline{Ba}$	✓9
4		$Ab \wedge Eb$	
5		$Aa \rightarrow Ba$	✓10
		$Ab \rightarrow Bb$	
6		$\overline{Aa} \rightarrow \overline{Ca}$	✓11
		$\overline{Ab} \rightarrow \overline{Cb}$	
7		$\overline{Ba \rightarrow Aa}$	
		$\overline{Bb \rightarrow Ab}$	
8		$\overline{Ca} \rightarrow \overline{Ea}$	
		$\overline{Cb} \rightarrow \overline{Eb}$	

Vérification

9 Ca, $\overline{Ba}$

10 $\overline{Aa}$ | Ba x

11 Aa x | $\overline{Ca}$ x

1. Nous introduisons la conclusion sous forme niée.

2. Il y a deux expressions à transformer. L' (∃x) niée devient une (∀x) et la conjonction donne une (∃x) et une (∀x). L'arbre contient maintenant 2 (∃x). Il reste 6 lignes (*) pour établir le modèle.

3. Nous commençons par les deux (∃x) qui portent sur deux individus différents.

4.. Toutes les (∀x) sont aussi interprétées pour ces deux individus.

5. Nous vérifions les expressions du modèle individu par individu. Conseil: ce n'est pas forcément avec l'individu « a » que l'on ferme le plus vite! Une évaluation rapide permettra peut-être de gagner beaucoup de temps ! *(Sans incidence pour cet exercice)*

6. Nous terminons la vérification par la méthode connue.

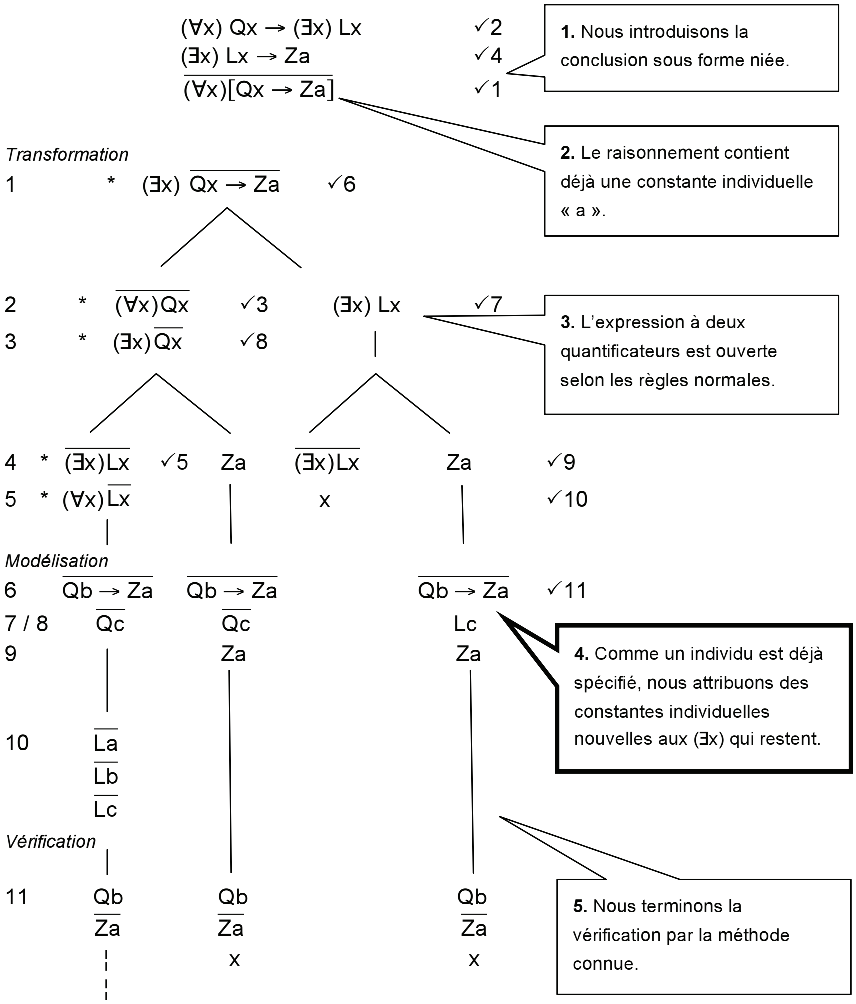
Toutes les branches sont clôturées, le raisonnement est valide.

Exercice 3

Raisonnement

(∀x) Qx → (∃x) Lx; (∃x) Lx → Za |— (∀x) [Qx → Za]

Arbre de vérification



Toutes les branches ne sont pas clôturées, le raisonnement **n'est pas** valide.